PART2 指数関数の性質

要点① 指数関数の性質

指数関数 $y=a^x$ のグラフから，次のことがいえる。

指数関数の性質

1 定義域は実数全体，値域は正の数全体

2 $a>1$ のとき

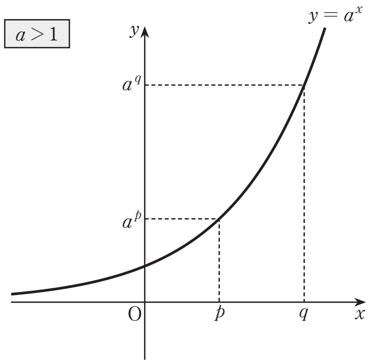
x の値が増加すると y の値も増加する。

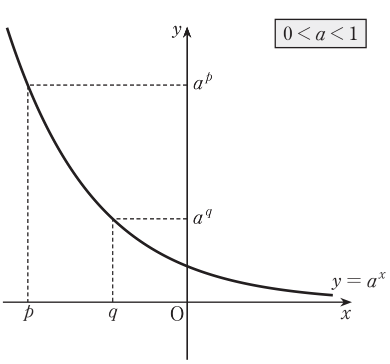
すなわち　$p<q \iff a^p<a^q$

$0<a<1$ のとき

x の値が増加すると y の値は減少する。

すなわち　$p<q \iff a^p>a^q$





x の値が増加すると y の値も増加する関数を「　　　　」，x の値が増加すると y の値が減少する関数を「　　　　」という。

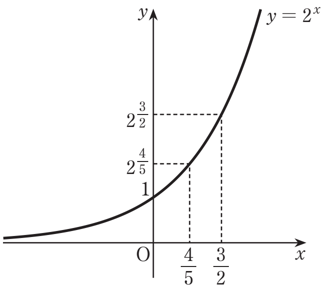
例 $\sqrt{8}$ と $\sqrt[5]{16}$ の大小を考える。

$\sqrt{8}=$　　　$=$　　　，$\sqrt[5]{16}=$　　　$=$

指数の大小について　$\dfrac{4}{5}<\dfrac{3}{2}$

2 は　　　　　　から　$2^{\frac{4}{5}}$　$2^{\frac{3}{2}}$

よって　$\sqrt[5]{16}<\sqrt{8}$



[MEMO]

2 次の数の大小を，不等号を用いて表せ。

(1) $\dfrac{1}{9}$，$\sqrt[4]{27}$，1

(2) $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$，$\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}$，$\sqrt[4]{\dfrac{1}{27}}$

Point Pickup

指数で表された数の大小

指数で表された数の大小比較は，「底」をそろえた上で，指数の性質

$a>1$ のとき　$p<q \iff a^p<a^q$

$0<a<1$ のとき　$p<q \iff a^p>a^q$

を利用して比較する。

第 13 講 PART2 確認問題

次の数の大小を，不等号を用いて表せ。

1 $\frac{1}{8}$，$\sqrt[4]{32}$，1

ア

① $\frac{1}{8} < \sqrt[4]{32} < 1$

② $\frac{1}{8} < 1 < \sqrt[4]{32}$

③ $\sqrt[4]{32} < \frac{1}{8} < 1$

2 $\sqrt[5]{\frac{1}{4}}$，$\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$，$\sqrt{\frac{1}{2}}$

イ

① $\sqrt[5]{\frac{1}{4}} < \sqrt{\frac{1}{2}} < \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$

② $\sqrt[3]{\frac{1}{16}} < \sqrt[5]{\frac{1}{4}} < \sqrt{\frac{1}{2}}$

③ $\sqrt[3]{\frac{1}{16}} < \sqrt{\frac{1}{2}} < \sqrt[5]{\frac{1}{4}}$

PART2 指数関数の性質

2 次の数の大小を，不等号を用いて表せ。

(1) $\dfrac{1}{9}$，$\sqrt[4]{27}$，1　　(2) $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$，$\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}$，$\sqrt[4]{\dfrac{1}{27}}$

[解答]

(1) $\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{3^2}=3^{-2}$，$\sqrt[4]{27}=(3^3)^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{3}{4}}$，$1=3^0$

指数の大小について　$-2<0<\dfrac{3}{4}$

底 3 は 1 より大きいから　$3^{-2}<3^0<3^{\frac{3}{4}}$　　よって　$\dfrac{1}{9}<1<\sqrt[4]{27}$

(2) $\sqrt{\dfrac{1}{3}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$，$\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}=\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\right\}^{\frac{1}{3}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$，$\sqrt[4]{\dfrac{1}{27}}=\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\right\}^{\frac{1}{4}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$

指数の大小について　$\dfrac{1}{2}<\dfrac{2}{3}<\dfrac{3}{4}$

底 $\dfrac{1}{3}$ は 0 より大きく 1 より小さいから　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

よって　$\sqrt[4]{\dfrac{1}{27}}<\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}<\sqrt{\dfrac{1}{3}}$

第13講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：②

[解説]

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}=2^{-3}$$ [A]

$$\sqrt[4]{32}=(2^5)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{5}{4}}$$

$$1=2^0$$

指数の大小について

$$-3<0<\frac{5}{4}$$

底 2 は 1 より大きいから [B]

$$2^{-3}<2^0<2^{\frac{5}{4}}$$

よって　$\boldsymbol{\frac{1}{8}<1<\sqrt[4]{32}}$

[A]　比較する数の底をそろえる。

[B]
・$a>1$ のとき　$p<q \Longleftrightarrow a^p<a^q$
・$0<a<1$ のとき
　$p<q \Longleftrightarrow a^p>a^q$

2 [正解] イ：③

[解説]

$$\sqrt[5]{\frac{1}{4}}=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{5}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{5}}$$ [C]

$$\sqrt[3]{\frac{1}{16}}=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

指数の大小について

$$\frac{2}{5}<\frac{1}{2}<\frac{4}{3}$$

底 $\frac{1}{2}$ は 0 より大きく 1 より小さいから [D]

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{5}}$$

よって　$\boldsymbol{\sqrt[3]{\frac{1}{16}}<\sqrt{\frac{1}{2}}<\sqrt[5]{\frac{1}{4}}}$

[C]　比較する数の底をそろえる。

[D]
・$a>1$ のとき　$p<q \iff a^p<a^q$
・$0<a<1$ のとき
　$p<q \iff a^p>a^q$